| | |
|---|---|
| **Etkinlik No** | 3 |
| **Ders Adı** | Matematik |
| **Sınıf Düzeyi** | 10-12. Sınıflar arası |
| **Etkinlik Adı** | Geometrik Seriler |
| **Süre** | 40’+40’ |
| **Strateji, Yöntem ve Teknikler** | Buluş yoluyla öğretim, soru-cevap, problem çözme, tartışma. |
| **Materyal/Araç Gereç** | Ek 1 formu, kalem, boya kalemleri, cetvel, pergel. |
| **Disiplinler arası Boyut** | Görsel Sanatlar. |
| **Kazanımlar** | 1) Özel durumlardan genel durumlara ulaşarak verilen problemleri çözer.<br>2) Yaptığı genellemeler ile seri, dizi ve kısmi toplamlar dizisini ilişkilendirir.<br>3)Geometrik seri toplam formülünü ispatlar.<br>4)Farklı disiplinlerdeki çokluklar arası ilişkileri seri olarak modeller. |
| **Hazır Bulunuşluk ve Ön Hazırlık** | Öğrenciler üslü sayılar ve dizilerle ilgili genel bilgilere sahip olmalıdır.<br>Öğretmen, etkinlik formunu öğrenci sayısına göre çoğaltmalı, kullanacağı materyalleri hazırlamalıdır. Satrancın doğuşuyla ilgili problemin sunumunda videolardan yararlanılabilir. Eğer videodan yararlanmak istenirse video da hazırlanmalıdır. |
| **Öğrenme Öğretme Süreci** | İlk olarak satrancın doğuşu ile ilgili etkinlik kâğıdında verilen hikâye öğrencilere sunulur ve öğrencilerin ilgileri çekilir. Bu hikâyeye göre satranç tahtasının 64. karesi için kaç buğday verilmesi gerektiği sorulur. Öğrencilerin kolaylıkla $2^{63}$ cevabına ulaşmaları beklenir. Bundan sonra bir adım daha ileriye götürülerek hikâyedeki gibi bir yerleşim yapıldığında satranç tahtasının tamamı için toplam kaç buğday verilmesi gerektiği öğrencilere sorulur. Öğrencilerin verilecek toplam buğday sayısını;<br>$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}$<br>şeklinde ifade etmeleri beklenir. Bu toplamın sonucunu bulduracak fikirler üretmeleri için öğrenciler teşvik edilir. Öğrenciler çözüme ulaşamadıkları takdirde önce temel/basit durumlardan başlayarak bir genelleme yapıp yapamayacakları sorulur. “Satranç tahtasında 1 kare olsaydı toplam kaç buğday vermek gerekirdi?, 2 kare olsaydı toplam kaç buğday vermek gerekirdi?, 3 kare olsaydı toplam kaç buğday vermek gerekirdi?,...” Bu sorulara cevap olacak şekilde öğrencilerin şu adımları izlemeleri beklenir: |

| | |
|---|---|
| | 1 kare olsaydı; 1 buğday,<br>2 kare olsaydı; 1+2=3 buğday,<br>3 kare olsaydı; 1+2+4=7 buğday,<br>4 kare olsaydı; 1+2+4+8=15 buğday,<br>…<br>Elde edilen sonuçların sırasıyla $2^1-1,\ 2^2-1,\ 2^3-1,\ 2^4-1, \ldots$<br>şeklinde olduğu fark edilir. 64 kare olsaydı $2^{64}-1$ olması gerektiği anlaşılır. Öğrencilerin bu sonucu n tane kare için<br>$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$<br>şeklinde genellemeleri beklenir.<br>Bu başlangıçtan sonra geometrik serilerin kısmı toplamına ait formülün buldurulması için örüntü içeren Örnek-1 verilir. Yukarıdakine benzer bir süreç izlenerek öğrencilerin ilk n adımdaki üçgen sayısını aşağıdaki gibi bulmaları sağlanır:<br>$$1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}=\frac{3^n-1}{2}$$<br>Öğrencilerin benzer durumlara bu çözümün uygulanabilirliğini keşfetmeleri için Örnek-2 yönlendirilir. Bu yöntemi nasıl genelleyebilecekleri sorulur, üzerinde düşünmeleri istenir. Gelen cevaplar tartışılır.<br>Seri ve serinin kısmı toplamı kavramları tanımlanır. Daha sonra geometrik serinin ne olduğu açıklanır. Öğrencilerden yukarıdaki örnekler ile geometrik seriler ve geometrik serilerin kısmi toplamları arasında ilişki kurmaları beklenir. Buldukları ilişkiden yararlanarak geometrik seri toplam formülünü elde edip edemeyecekleri üzerine düşünmeleri istenir.<br>Geometrik serilerin kısmi toplamı aşağıdaki gibi yazılır:<br>$S_n= a_1+ a_2+\ldots + a_n$<br>$= a_1+a_1.r +a_1.r^2 +\ldots +a_1.r^{n-1}$<br>Buradan<br>$S_n=a_1.(1 +r +r^2+r^3 +\ldots+r^{n-1})= a_1.\frac{1-r^n}{1-r}$<br>bulunur.<br>Sonsuz toplam için ise<br>$1 +r +r^2+r^3 +\ldots+r^n+\ldots= \frac{1}{1-r}$ şeklindedir.<br>Bu formülün farklı ispatları öğrencilerle tartışılarak yapılabilir.<br>Formülün elde edilmesi ve ispatının ardından geometrik seri örnekleri ile geometrik serilerde toplam formülünün uygulaması yaptırılır. Gerçek yaşam durumlarını içeren |

| | |
|---|---|
| | problemlerin çözümünde öğrenilen ve keşfedilen bu geometrik seri toplamını uygulanır.<br>Matematiğin içindeki farklı konuları ilişkilendirmek (devirli ondalık sayılar-seriler-rasyonellik) adına Örnek-6 verilir. Matematik ile görsel sanatlar arasında ilişki kurmak için ise öğrencilerden geometrik serilerin uygulanabileceği bir fraktal tasarlamaları ve buna uygun bir problem kurarak çözmeleri istenir. |
| **Ölçme ve Değerlendirme** | Ek 2 formu |
| **Kaynakça** | Çağlar, S. (2018, 10 Ocak). "*Asal sayıları bulmak için buğday ve bir satranç tahtası nasıl kullanılır?*". Matematiksel. Erişim adresi: www.matematiksel.org/ibn-hallikanin-bugday-ve-satranc-tahtasi-sorusu/. Erişim tarihi: 27.09.2022 |

**EK 1-ETKİNLİK KÂĞIDI**

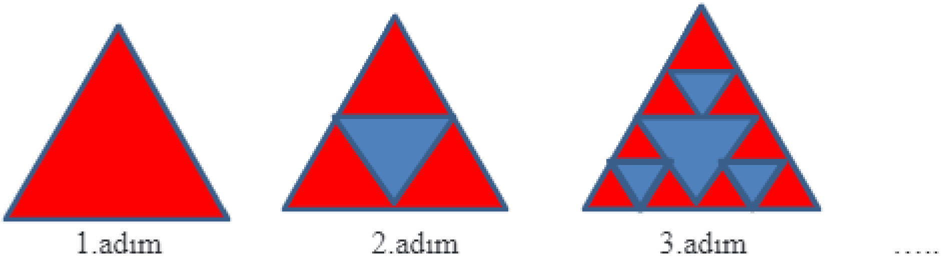
*(Çağlar, 2018)*

*"Hikayeye göre, satrancın mucidi olarak bilinen Sissa ben Dahir, bir gün hükümdarı Kral Sharim'in huzuruna çağrılır. Kral yeni keşfedilen satranç oyunundan çok memnundur. Bu nedenle de Sissa'ya istediği herhangi bir ödülü vermeyi teklif eder. Sissa da biraz tahıl ister. Bu mütevazi istediğini de 8 × 8 satranç tahtasındaki kareleri kullanarak açıklar. İlk başta bir buğday tanesini (hikayenin bazı versiyonlarında pirinç) satranç tahtasının sol alt karesine yerleştirir. Sonrasında bir sonraki kareye geçer ve buraya da iki buğday koyar. Devamında aynı biçimde devam eder. 4,8,16,32… biçiminde buğday tanelerini sırasıyla satranç karelerine yerleştirir. Önemsiz bir ödül gibi görünen şeye şaşıran kral, tahılların sayılmasını emreder. 8. karede 128 tane, 24. karede 8 milyondan fazla ve satranç tahtasının ilk yarısındaki son kare olan 32. karede 2 milyardan fazla buğday tanesi vardır."* (Çağlar, 2018)

Sizce bu hikayeye göre 64.karede kaç tane buğday tanesi olabilir?

Bu şekilde buğdaylar yerleştirildiğinde satranç tahtasında toplam kaç tane buğday tanesi olur?

**Örnek-1)** Aşağıda bir fraktalın oluşum adımları verilmiştir. 1.adımda bir tane kırmızı üçgen, 2.adımda 3 tane kırmızı üçgen, 3.adımda 9 tane kırmızı üçgen boyanmıştır.




a) n. adımda kaç tane kırmızı üçgen boyanacağını bulunuz.

b) Toplam 1 den n. adıma kadar kaç tane kırmızı boyanan üçgen olduğunu bulunuz.

**Örnek-2)** Siz de yukarıdaki gibi bir fraktal oluşturup yukarıdakine benzer problemler kurarak çözmeye çalışınız.

**Seri**
$T_n$ bir dizi olsun. Bu dizinin terimlerinin sonsuz toplamına seri denir. Aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{T_n} = \mathrm{T_1} + \mathrm{T_2} + \mathrm{T_3} + \cdots$$

$S_1$=$T_1$ , $S_2$=$T_1 + T_2$,... olmak üzere $S_n$=$T_1 + T_2$+...+ $T_n$ ise serinin kısmi toplamını göstermektedir.

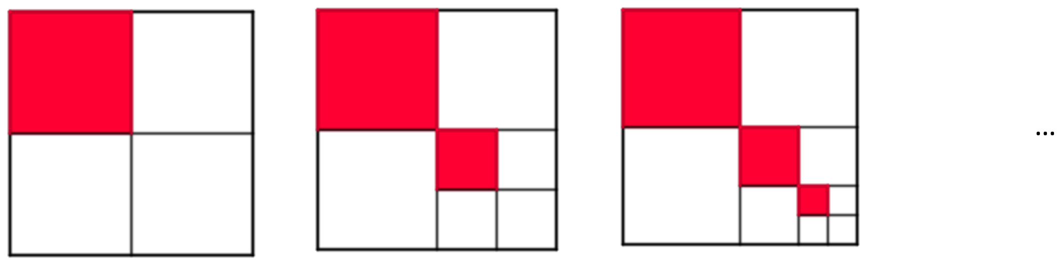
**Geometrik Seri**
Ardışık iki terimi arasında sabit bir oran olan geometrik dizilerin sonsuz toplamına geometrik seri denir. Aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.r^{n-1} = a + a.r + a.r^2 + \cdots$$

Yukarıdaki örneklerle geometrik seri arasında bir ilişki var mıdır?

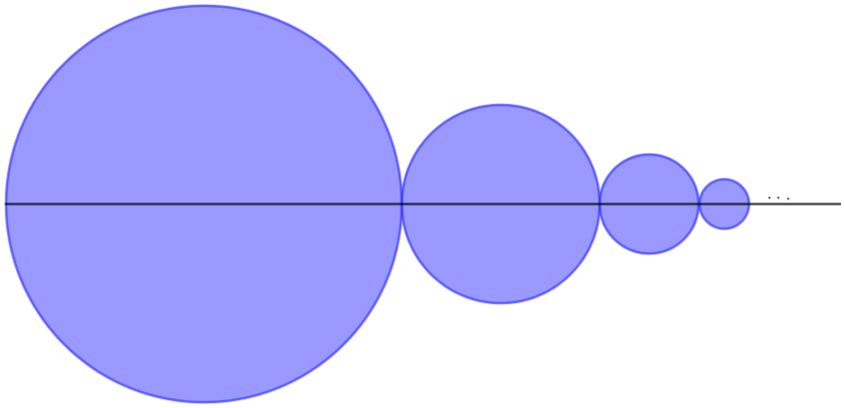
Geometrik serilerin kısmı toplamını ve sonsuz toplamını nasıl hesaplayabiliriz?

**Örnek-3)** Bir kenarı 6 br olan bir kare alınıyor. Bu kare 4 eşit parçaya bölünüp sol üst tarafı taranıyor. Daha sonra taranan bu karenin çaprazındaki kare dört eşit parçaya bölünüp yine sol üst kare taranıyor. Bu işlem sonsuz kez tekrarlanırsa tüm taralı alanların toplamı kaç birim kare olur?



1. adım  2. adım  3. adım  ...

**Örnek-4)**



Yukarıdaki şekilde en soldaki çemberin yarıçapı 4 birimdir. Her çemberin çapı, solundaki çemberin yarıçapına eşit olacak şekilde sonsuz tane çember çiziliyor.

Oluşan çemberlerin çevreleri toplamı kaç birim olur?

**Örnek-5)** 30 metre yükseklikten bırakılan bir top her yere çarptığında bir önceki yüksekliğinin $\frac{3}{5}$ i kadar yükselmektedir. Buna göre topun duruncaya kadar aldığı yol toplam kaç metredir?

**Örnek-6)** Sonsuz geometrik seri ile devirli ondalık sayıların rasyonel bir sayıya eşit olduğunu gösteriniz.

## Ek 2- Kontrol Listesi Formu

Etkinliği uyguladığımız öğrencilerimizde gözlemlediğimiz davranışlara evet, gözlemleyemediğimiz davranışlara hayır olarak işaretleyiniz.

| Öğrencinin adı soyadı: | evet | hayır |
|---|---|---|
| Verilen hikayeye ilgi gösterip sorular sordu. | | |
| Disiplinler arası ilişkilendirme ile el becerisi kullandı. | | |
| Farklı disiplinlerdeki çokluklar arası ilişkileri seri olarak modelledi. | | |
| Seri, dizi ve kısmi toplamlar dizisini ilişkilendirdi. | | |
| Geometrik seri toplam formülünü ispatladı. | | |
| Eldeki bilgilerle yola çıkarak çeşitli genellemeler yapmaya istekliydi. | | |